Exercice 1 (4 points) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 — 1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

0,5 — 2) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$

0,5 — b) Montrer que la suite (u_n) est convergente

3) On pose : $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,75 — a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

0,75 — b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 — c) Calculer la limite de la suite (u_n)

0,5 — 4) A partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$?

Exercice 2 (5 points) :

0,75 — 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c telles que : $a = 3 + 2i$; $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$

0,5 — a) Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique

05 — b) En déduire la nature du triangle ABC

3) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$

0,5 — a) Ecrire z' en fonction de z

0,25 — b) Vérifier que C est l'image de A par R

0,5 — 4) a) Montrer que les points A , C et D sont aligné

0,5 — b) Déterminer e rapport de l'homothétie de centre C et qui transforme A en D

0,5 — c) Déterminer l'affixe m de point E pour que la quadrilatère BCDE soit un parallélogramme

0,5 — 5) a) Montrer que : $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel

05 — b) En déduire que le quadrilatère ABED est un trapèze isocèle

Exercice 3 (3 points) :

On considère la fonction numérique h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = x + \ln(x)$

0,5 — 1) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

0,5 — 2) Déterminer $h(]0,+\infty[)$

0,5 — 3) a) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$

0,5 — b) Montrer que : $0 < \alpha < 1$

0,5 — 4) a) Vérifier que : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$

0,5 — b) En déduire que : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2$

Problème (8 points) :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ (unité 1com)

0,5 — 1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

0,5 — 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,75 — b) Montrer que : $\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

0,75 — 3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$

0,5 — b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0,5 — 4) a) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 — b) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 2

1 — 5) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ (on prend : $f(2) \approx 1{,}25$)

0,5 — 6) Déterminer la valeur minimum de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x-1} \geq x$

0,5 — 7) a) En utilisant un intégration par parties, Calculer : $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

0,5 — b) En déduire que : $\int_0^2 f(x)dx = 4 - e + 3e^{-1}$

8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1]$

0,5 — a) Montrer que g admet un fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminera

0,75 — b) Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$

0,25 — c) A partir de la courbe représentative de g^{-1}, déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g^{-1}(x)}{x}\right)$